TD n°1: Fonctions analytiques, séries entières

Analyse complexe 2024-2025, Thomas Serafini
tserafini@dma.ens.fr

N'hésitez pas à m'écrire si vous trouvez une erreur dans la correction ou si vous voulez une clarification !

Séries entières

Exercice 1. Vrai-faux d'échauffement
On peut utiliser la caractérisation comme quoi $\rho(f)$ est le sup des réels $r > 0$ tels que $|a_n|r^n$ est bornée. On écrit $f(z) = \sum a_n z^n$ et $g(z) = \sum b_n z^n$.

1. Vrai et vrai. Si $|a_n|r^n$ et $|b_n|r^n$ sont bornés, alors $|a_n + b_n|r^n \leq |a_n|r^n + |b_n|r^n$ est bornée.
   Similairement, si $r < r' < \min(\rho(f), \rho(g))$, en prenant $C > 0$ telle que $|a_n|r'^n < C'$ et $|b_n|r'^n < C'$, on a
   $$\left|\sum a_k b_{n-k}\right| r^n \leq (r/r')^n \sum |a_k|r'^k |b_{n_k}|r'^{n-k} \leq nC(r/r')^n.$$
2. Vrai. Soit $r > 0$: on a $|a_n + b_n|r^n \geq |b_n|r^n - |a_n|r^n$. Pour $\rho(f) > r > \rho(g)$, on a $|a_n|r^n$ borné et $|b_n|r^n$ non-borné, donc $\rho(f+g) \leq \rho(g)$, ce qui conclut par l'item précédent.
3. Faux. $f(z) = 1 - z$, $g(z) = \frac{1}{1-z}$.
4. Vrai, faux. Si $\sum a_n z^n$ converge pour $|z| = r$ alors forcément $|a_n|r^n$ est bornée. Un contre-exemple à la deuxième affirmation est donné par $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^2}$ sur le cercle $|z| = 1$.
5. Il suffit de remarquer que $a_n R^n \to 0$ si, et seulement si $(n+1)a_{n+1}R^n \to 0$.

Exercice 2. Série harmonique
$H_n = \log(n) + O(1)$ donc le rayon de convergence est 1 par le critère de votre choix.
En écrivant $\frac{1}{1-z} = \sum_{n\geq 0} z^n$ et $-\log(1-z) = \sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$, on calcule :

$$\begin{aligned}
-\frac{\log(1-z)}{1-z} &= \left(\sum_{n\geq 0} z^n\right) \cdot \left(\sum_{m\geq 1} \frac{z^m}{m}\right) \\
&= \sum_{\ell\geq 0} \left(\sum_{m+n=\ell, m\geq 1} \frac{1}{m}\right) z^\ell \\
&= \sum_{\ell \geq 0} H_\ell z^\ell.
\end{aligned}$$

Exercice 3. Somme de carrés
On réécrit $\sum_{m\geq 0} z^{m^2} := \sum_{n\geq 0} c_n z^n$ où c_n est 1 si n est un carré et 0 sinon. On trouve donc

$$\left(\sum_{m\geq 0} z^{m^2}\right)^2 = \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{i+j=n} c_i c_j\right) z^n.$$

Il suffit à présent de voir que $\sum_{i=0}^n c_i c_{n-i} = r_2(n)$: pour ça, on remarque que $c_i c_{n-i}$ est 1 précisément quand $i + n - i = n$ est une écriture de n comme somme de deux carrés, ce qui conclut pour le premier calcul.
Le second calcul revient juste à écrire $D_n = \sum_{k=0}^n r_2(k)$.

Exercice 4. Un peu de combinatoire

1. Prouver l'égalité $S'(z) = (1+z)S(z)$ revient à prouver $P_{n+1} = P_n + nP_{n-1}$ car

$$S'(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{P_{n+1}}{n!} z^n, (1+z)S(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{P_n}{n!} z^n + \sum_{n\geq 1} \frac{P_{n-1}}{(n-1)!} z^n.$$

   Cette égalité se prouve combinatoirement : si on considère les partitions de $A_n := \{1, ..., n\}$, une partition de A_{n+1} en morceaux à 1 ou 2 éléments correspond soit à une partition de A_n (si $n+1$ est seul), soit au choix d'un élément i de A_n (le compagnon de $n+1$) et une partition de $A_n \setminus \{i\}$.

2. L'équation différentielle se résout explicitement dans $\mathbb{C}[\![z]\!]$ par $S(z) = Ce^{z+\frac{z^2}{2}}$. Comme $S(0) = 1$, on sait que $C = 1$.

3. Il suffit à présent de développer :

$$\begin{aligned} e^{z+\frac{z^2}{2}} &= e^z e^{z^2/2} \\ &= \left(\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{m\geq 0} \frac{z^{2m}}{2^m m!}\right) \\ &= \sum_{k\geq 0} \left(\sum_{n+2m=k} \frac{k!}{n!2^m m!}\right) \frac{z^k}{k!} \end{aligned}$$

   On trouve finalement

$$P_k = \sum_{m=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \frac{k!}{m!(k-2m)!2^{k-2m}}.$$

Exercice 5. Une expression explicite pour les suites de Lucas

1. On vérifie que

$$(1 - az - bz^2)L(z) = \sum_{n\geq 2} (L_n - aL_{n-1} - bL_{n-2})z^n + L_0 + L_1 z - aL_0 = z.$$

2. On vérifie que

$$\frac{z}{-b(z-\alpha)(z-\beta)} = \frac{1}{b(\alpha-\beta)}\left(\frac{1}{z-\alpha} - \frac{1}{z-\beta}\right).$$

   De là, en écrivant

$$\frac{1}{z-\alpha} = -\frac{1}{\alpha}\frac{1}{1-(z/\alpha)} = -\sum_{n\geq 0} \frac{1}{\alpha^{n+1}} z^n$$

   on trouve

$$L_n = \frac{1}{b(\beta-\alpha)}\left(\frac{1}{\alpha^n} - \frac{1}{\beta^n}\right)$$

   Si $\alpha = \beta$, on a

$$\frac{1}{-b(z-\alpha)^2} = \frac{1}{b\alpha^2} \sum_{n\geq 0} \frac{n}{\alpha^n} z^n$$

Exercice 6. Composition de séries entières

1. Aucune difficulté ici, l'expression est clairement linéaire en les $(a_n)_n$.

2. On travaille modulo z^{k+1}. Pour n'importe quel polynôme u, et deux entiers $n, n' \geq k$, on a $u(h_n(z)) = u(h_{n'}(z)) \pmod{z^{k+1}}$ car $h_n(z) = h_{n'}(z) \pmod{z^{k+1}}$.
Maintenant, pour $r > k$, comme $h_n(z) = 0 \pmod z$, on a $h_n(z)^r = 0 \pmod{z^{k+1}}$. Soient $m, m' > k$: les polynômes f_m et $f_{m'}$ ont les mêmes termes d'ordre $\leq k$, et comme les termes d'ordre $> k$ s'annulent sur h_n, on a $f_m(h_n(z)) = f_{m'}(h_n)(z) \pmod{z^{k+1}}$.
Comme le coefficient $C_{m,n}$ ne fait intervenir que les coefficients de h de degré $\leq n$, c'est aussi le coefficient de z^n dans $h_n(z)^m$. Vu que le coefficient de z^n dans $f(h(z))$ ne fait intervenir que les a_r et $C_{r,n}$ pour $r \leq n$, c'est aussi le coefficient de z^n dans $f_m(h_n(z))$ pour $m \geq n$.

3. L'égalité $f_m(h_n(z))g_m(h_n(z)) = (fg)_m(h_n(z)) \pmod z^{k+1}$ pour $m, n > k$ permet de conclure pour le produit. L'associativité découle du fait que si g, h sont divisibles par z, alors pour $l, m, n > k$, on a $f_m(g_l \circ h_n(z))) = f_m \circ g_l(h_n(z))$ par associatvitié de la composition de polynômes. Comme les coefficients d'ordre $\leq k$ de $f_m \circ g_l$ sont ceux de $f \circ g$ et les coefficients d'ordre $\leq k$ de $g_l \circ h_m$ sont ceux de $g \circ h$, ce qui conclut.

4. Comme h a un rayon de convergence positif, elle définit une fonction continue sur le disque fermé de rayon r pour tout $r > 0$ assez petit. Comme h est continue et $h(0) = 0$, étant donné $r' > 0$, il existe un $r > 0$ tel que $h\big(\overline{\mathbb{D}}(0,r)\big) \subseteq \overline{\mathbb{D}}(0,r')$. Il suffit alors de prendre $r' < \rho(f)$: alors, pour $|z| \leq m$, on a convergence absolue de $\sum a_m h(z)^m$ et de $\sum C_{m,n} z^n$ et on peut échanger

$$\begin{aligned} f(h(z)) &= \sum_{m \geq 0} a_m h(z)^m \\ &= \sum_{m \geq 0} a_m \sum_{n \geq m} C_{m,n} z^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{m=0}^{n} a_m C_{m,n} \right) z^n. \end{aligned}$$

Exercice 7. L'anneau $\mathbb{C}[\![z]\!]$

1. $\mathrm{ord}(f) \geq k$ si et seulement si $a_0 = ... = a_{k-1} = 0$, auquel cas

$$f(z) = a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1} + ... = z^k (a_k + a_{k+1} z + ...)$$

2. En posant $m = \mathrm{ord}(f)$, $n = \mathrm{ord}(g)$, on a $f = z^m u, g = z^n v$ $u(0), v(0) \neq 0$. On a alors $fg = z^{m+n} uv$, où le coefficient constant de uv est non-nul.

3. Comme $\mathrm{ord}(f) = 0$, $a_0 \neq 0$, et donc quitte à multiplier par $1/a_0$ on peut supposer que $f(z) = 1 - zg(z)$. De là, les propriétés de composition des séries entières nous assurent que $(1 - zg(z)) \cdot \frac{1}{1-zg(z)} = 1$.

4. Comme I est un idéal propre, il ne contient aucun élément inversible, donc tous ses éléments sont d'ordre ≥ 1, et donc multiples de z.

5. Soit $f(z)$ un élément d'ordre minimal m dans I : on écrit $f(z) = z^m u(z)$ avec g inversible. Si $g(z) = z^m h(z)$, alors $g(z) = f(z) u(z)^{-1} h(z) \in I$, d'où $z^m \mathbb{C}[\![z]\!] \subseteq I$. Comme m est minimal, tout élément de I est multiple de z^m, ce qui conclut.

6. Le seul point réellement délicat est la convergence de la série entière

$$\frac{1}{1 - zg(z)}$$

si $1 - zg(z)$ est convergente, mais ça découle de la convergence du composé de séries entières convergentes (on pourrait aussi s'amuser à borner explicitement vu que les coefficients sont raisonnablement sympathiques).

Exercice 8. Théorème de Cauchy pour les équations différentielles

1. C'est une vérification directe : si $\boldsymbol{y}(z) = [y_0(z), ..., y_{n-1}(z)]^T$, l'équation $\boldsymbol{y}'(z) = A(z)\boldsymbol{y}(z)$ est équivalente à $y_i'(z) = y_{i+1}(z)$ pour $i = 0, ..., n-2$, donc $y_i(z) = y^{(i)}(z)$ et $y_{n-1}' = -a_{n-1}y_{n-1} - ... - a_0 y_0$, donc on retrouve l'équation voulue en remplaçant y_i par $y^{(i)}$.

2. Multiplier une matrice à gauche par A revient à multiplier ses colonnes par A.

3. On dérive la relation $YY^{-1} = \mathbf{1}_n$:
$$Y'Y^{-1} + Y(Y^{-1})' = 0$$
donc $(Y^{-1})' = -Y^{-1}Y'Y^{-1}$. Comme $Y' = AY$, on a
$$(Y^{-1})' = -Y^{-1}AYY^{-1} = -Y^{-1}A.$$

4. On vérifie en appliquant la règle de Leibniz que $(Y_1^{-1}Y_2)' = 0$:
$$(Y_1^{-1})'Y_2 + Y_1^{-1}Y_2' = -Y_1^{-1}AY_2 + Y_1^{-1}AY_2 = 0.$$
Par conséquent, $Y_2 = Y_1 C$ avec C une matrice constante : en particulier, les colonnes de Y_1 forment une $\mathbb{C}$-base de l'espace des solutions.

5. C'est encore un calcul : on a d'une part
$$Y' = \sum_{n \geq 0} (n+1) Y_{n+1} z^n$$
et d'autre part
$$AY = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} A_k Y_{n-k} \right) z^n.$$
Par conséquent, $Y' = AY$ et $Y(0) = \mathbf{1}_n$ si et seulement si $(Y_n)_n$ vérifie
$$\begin{cases} Y_0 = \mathbf{1}_n \\ Y_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} A_k Y_{n-k} \end{cases}.$$
Il existe clairement une et une seule suite de matrices vérifiant ces conditions.

6. L'existence d'une matrice de solutions inversibles implique l'existence d'une base de cardinal n par les questions précédentes.

7. Notons $|M|$ la norme donnée par le sup des modules des coefficients de M. On a $|MN| \leq n|M| \cdot |N|$. Si R est tel que A converge sur le cercle de rayon R, alors $|A_m| \leq CR^{-m}$ pour une constante réelle $C > 0$. Soit $r < R$ un réel, on veut montrer qu'il existe une constante D (à déterminer) telle que $|Y_m| \leq Dr^{-m}$. On procède par récurrence.
$$\begin{aligned} |Y_{m+1}| &\leq \frac{n}{m+1} \sum_{k=0}^{m} |A_k| \cdot |Y_{m-k}| \\ &\leq \frac{n}{m+1} \sum_{k=0^m} CD(r/R)^k r^{-m} \\ &\leq \frac{CDn}{m+1} \cdot \frac{1}{1 - r/R} \cdot r^{-m} \\ &\leq D \frac{Cnr}{(m+1)(1-r/R)} r^{-m-1}. \end{aligned}$$
Il faut à présent choisir judicieusement la constante D. Pour m assez grand, cette condition sera vérifiée car $\frac{Cnr}{(m+1)(1-r/R)} \to 0$ quand $m \to \infty$, et donc elle devient inférieure à 1 à partir d'un certain rang m_0. Si l'on choisit D supérieure à $|Y_m|r^m$ pour tout $m < m_0$, alors certainement l'égalité sera vérifiée par défaut pour $m < m_0$, et elle le sera pour $m \geq m_0$ par notre estimation.

Fonctions analytiques

Exercice 9. Opérations sur les fonctions analytiques

1. La question est locale sur U, et le produit de séries entières convergentes est convergent (et le produit est compatible à l'évaluation en un point du domaine de convergence).
2. La question est encore une fois locale sur U. Si l'on considère le développement de g au voisinage de $g(z_0) \in V$, le coefficient constant est nul, et on peut composer en toute sérénité.
3. L'identité $\cos^2 + \sin^2 = 1$ est déjà connue sur $\mathbb{R}$, et le principe des zéros isolés appliqué à la fonction $\cos^2(z) + \sin^2(z) - 1$ permet de conclure.

Exercice 10. Zéros d'une fonction analytique
L'ensemble $V(f) \subseteq U$ des zéros de f est discret dans U par le principe des zéros isolés. Si $K \subseteq U$ est compact, $K \cap Z(f)$ est compact et discret et donc fini.

Exercice 11.

1. On a la somme téléscopique
$$\sum_{k=0}^{n-1}(A_kB_k - A_{k+1}B_{k+1}) = A_0B_0 - A_nB_n,$$
que l'on peut écrire comme
$$\sum_{k=0}^{n-1}(A_kB_k - A_{k+1}B_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k(B_{k+1} - B_k) + B_k(A_{k+1} - A_k)$$
2. Posons pour tout $n \geq 0$, $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_kB_k$. On va montrer que sous les hypothèses, $(S_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy. Posons $A \geqslant 0$ tel que $|A_n| \leqslant A$ pour tout $n \geq 0$. Alors pour $N, M \geq 0$ tels que $N > M$, on a par la sommation d'Abel
$$|S_N - S_M| = \left| A_Nb_N - A_MB_M + \sum_{k=N}^{M-1} A_k(B_{k+1} - B_k)\right| \leq Ab_N + Ab_M + \sum_{k=N}^{M-1} A\,|b_{k+1} - b_k| \leq 2Ab_N.$$
Ceci conclut que $(S_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy et donc convergente.
3. Il est clair que le rayon de convergence de $\sum_n a_nz^n$ est $\leqslant 1$ puisque la série entière diverge pour $z = 1$. De plus pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, comme la suite des $|a_n|$ est bornée, disons par $C > 0$, on a
$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_nz^n| \leqslant C\sum_{n=0}^{\infty} |z|^n = \frac{C}{1 - |z|},$$
donc la série $\sum_n a_nz^n$ converge absolument et donc le rayon de convergence est 1. Soit $z \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$. Pour la convergence au bord on applique le critère d'Abel. Pour tout $N \geq 0$
$$\left|\sum_{n=0}^{N} z^n\right| \leq \frac{2}{|1 - z|},$$
donc les sommes partielles des z^n sont bornées. On est donc est bien sous les hypothèses du critère d'Abel et $\sum_n a_nz^n$ converge.

Exercice 12. Le n-ème coefficient de Taylor en a est $f^{(n)}(a)/n!$, donc l'ensemble des points où aucun coefficient de Taylor n'est nul est précisément
$$\bigcap_{n\geq 0} D\left(f^{(n)}\right)$$
où $D(f^{(n)})$ est l'ensemble des points de U où f ne s'annule pas. U étant connexe et la fonction analytique $f^{(n)}$ étant non-nulle pour tout $n \geq 0$, ses zéros sont isolés et $D(f^{(n)})$ est un ouvert dense. Par conséquent, l'ensemble des points où aucun coefficient n'est nul est un G_δ dense.

Exercice 13. Lemme de la partie réelle

1. On commence par observer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a
$$\int_0^{2\pi} e^{int} dt = \begin{cases} 2\pi & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
On a de plus $\Re(f(re^{it})) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(a_n e^{int} + \bar{a}_n e^{-int})r^n$. Comme cette série converge normalement on peut échanger l'intégrale et la somme pour obtenir
$$\int_0^{2\pi} \Re(f(re^{it}))e^{-int} dt = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} r^k \int_0^{2\pi} [a_k e^{ikt} + \bar{a}_k e^{-ikt}]e^{-int} dt.$$
Or dans cette somme, tous les termes pour $k \neq n$ s'annulent par la formule ci-dessus, et on obtient
$$\int_0^{2\pi} \Re(f(re^{it}))e^{-int} dt = r^n \pi a_n.$$

2. La première inégalité est relativement directe, d'après la formule précédente on a
$$|a_n| \leq \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} \left|\Re(f(re^{i\theta}))\right| d\theta \leq \frac{2A(r)}{r^n}.$$
On majore maintenant la série. Sous l'hypothèse que $f(0) = 0$, en utilisant l'inégalité précédente en $R \geqslant r$
$$\left|f(re^{i\theta})\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} r^n |a_n| \leq 2A(R) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n = 2A(R)\left(\frac{R}{R-r} - 1\right) = \frac{2rA(R)}{R-r}.$$
Ainsi on conclut que $M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)| \leq \frac{2rA(R)}{R-r}$.

3. On applique ce qui précède à $g(z) = f(z) - f(0)$ et on obtient
$$M(r) - |f(0)| \leq \frac{2r(A(r) + |f(0)|)}{R-r},$$
ce qui donne bien $M(r) \leq \frac{R+r}{R-r}|f(0)| + \frac{2r}{R-r}A(R)$.

Exercice 14. Convergence au bord

1. $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^2}$ converge en tout point du bord, $\sum_{n\geq 0}$ ne converge en aucun point du bord, et $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$ converge en tout point sauf en 1.

2. (a) On écrit $\Phi_m(z) = \frac{1-z^m}{1-z}$. On choisit k tel que $z_0 e^{\frac{2ik\pi}{m}}$ a un argument inférieur en valeur absolue à π/m. Il reste alors seulement à prouver que
$$\psi_m : t \mapsto \frac{|1 - e^{imt}|}{|1 - e^{it}|}$$
est supérieure à $2m/\pi$ sur $[-\pi/m, \pi/m]$. La fonction ψ_m est paire et vérifie
$$\phi(\pi/m) = \frac{2}{\left|1 - e^{\frac{i\pi}{m}}\right|} = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2m}\right)} \geq \frac{2m}{\pi}$$
donc il suffit de montrer qu'elle est décroissante sur $[0, \pi/m]$. La méthode de votre choix fonctionne ici, mais la preuve est un peu laborieuse. On peut cependant procéder par récurrence en remarquant que
$$\begin{aligned} \psi_m(t) &= \frac{\sin\left(m\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left((m-1)\frac{t}{2}\right) + \cos\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left((m-1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \\ &= \cos\left((m-1)\frac{t}{2}\right) + \cos\left(\frac{t}{2}\right)\phi_{m-1}(t). \end{aligned}$$

Comme $\cos\left((m-1)\frac{t}{2}\right)$ est décroissante sur l'intervalle $[0, \pi/m]$ et que ϕ_{m-1} et $\cos\left(\frac{t}{2}\right)$ sont décroissantes positives sur ce même intervalle, ϕ_m est décroissante. Un ami m'a garanti qu'on peut aussi prouver ces inégalités purement par considérations trigonométriques.

(b) Tout d'abord, vérifions que les coefficients de Taylor de f convergent bien vers zéro. La construction garantit que les coefficients n'interfèrent pas entre eux, et sont donc tous de la forme $\frac{\zeta}{\sqrt{m}}$ où ζ est une racine de l'unité, et les entiers m croissent (lentement) vers l'infini.
Maintenant, en fixant $z_0 \in \mathbb{T}$, on peut pour tout m trouver un terme dans $H_m(z_0)/\sqrt{m}$ qui est supérieur en valeur absolue à $2\sqrt{m}/\pi$, et la série donnée par $f(z_0)$ diverge donc grossièrement.